

Mathematische Bewertung zur Einführung eines neuen Sitzzuteilungsverfahrens für NRW-Kommunalwahlen: Das Quotenverfahren mit Ausgleich gemäß kleinstem Rundungsgewinn-pro-Sitz (Quotenverfahren mit prozentualem Restausgleich, Rock-Verfahren)

Friedrich Pukelsheim¹

13.01.2024

I. Übersicht

Im vorliegenden Gutachten, mit dem mich die Fraktion BÜNDNIS 90/DIE GRÜNEN und die Fraktion der CDU im Landtag NRW beauftragt haben, nehme ich Stellung zu dem neuen Sitzzuteilungsverfahren, das *Simon Rock* im Exposé² *Alternatives Sitzzuteilungsverfahren – Quotenverfahren mit prozentualem Restausgleich* schlüssig und nachvollziehbar darstellt. Der Kürze halber spreche ich vom *Rock-Verfahren*. Aus systematischer Sicht werde ich das Rock-Verfahren als *Quotenverfahren mit Ausgleich gemäß kleinstem Rundungsgewinn-pro-Sitz* bezeichnen, wie ich in Abschnitt III erläutern werde.

Das gängige Quotenverfahren ist das Hare/Niemeyer-Verfahren. Dieses gibt nach der Hauptzuteilung die verbleibenden Restsitze einzeln an die Parteien, die **ohne** Restsitz den größten Rundungsverlust oder – ergebnisgleich – **mit** Restsitz den kleinsten Rundungsgewinn aufweisen (II).

Das Rock-Verfahren ergänzt die Hauptzuteilung des Hare/Niemeyer-Verfahrens mit einem anderen Restausgleich. Die Restsitze werden einzeln an die Parteien mit dem kleinsten Rundungsgewinn-pro-Sitz vergeben. Im Rock-Exposé ist dieser Restausgleich geringfügig anders beschrieben, was dort zur Bezeichnung *Quotenverfahren mit prozentualem Restausgleich* führt (III).

Die Ersetzung von absoluten Rundungsgewinnen beim Hare/Niemeyer-Verfahren durch relative Rundungsgewinne-pro-Sitz ist bedeutsam. Zur Illustration wandle ich das Exposé-Beispiel so ab, dass alle Idealansprüche den Dezimalrest 0,5 bekommen. Während das Hare/Niemeyer-Verfahren diese Gleichstände erkennt und auf sie reagiert, setzt sich das Rock-Verfahren über sie hinweg und bevorzugt die stärkeren Parteien auf Kosten der schwächeren Parteien (IV).

Die Beispiele zeigen, dass das Rock-Verfahren in einem problematischen Verhältnis zu den Wahlgrundsätzen steht. Zentral ist der Grundsatz der gleichen Wahl, insbesondere hinsichtlich der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen. Zudem ist der Grundsatz der unmittelbaren Wahl zu bedenken (V).

Den im Rock-Exposé betonten Aufrundungsgewinnen sind die ebenfalls möglichen Abrundungsverluste entgegenzustellen. Im Einzelfall auftretende Sitzexzesse mögen irritieren, wichtiger aber sind die im Durchschnitt zu erwarteten Sitzverzerrungen, die verfahrenstypisch sind (VI).

Das Rock-Verfahren ist ein Quotenverfahren und dem derzeit gesetzlich normierten Sainte-Laguë-Verfahren, einem Divisorverfahren, unterlegen. Diese Systemfeinheiten haben m. E. wenig zu tun mit den Problemen von Ein-Personen-Ratsvertretungen, die das Rock-Verfahren adressiert. Auf Verfahrenseite ließe sich durchaus das Sainte-Laguë-Verfahren problemlösend modifizieren, nur steht dieser Lösung die rigide Argumentation der Verfassungsgerichte entgegen (VII).

Abschließend nehme ich zu dem im Gutachtenauftrag formulierten Fragenkatalog Stellung (VIII).

¹ E-Mail-Adresse des Autors: Pukelsheim@Math.Uni-Augsburg.DE

² Das Exposé ist diesem Gutachten als Anhang beigelegt.

II. Sitzzuteilung mit Hare/Niemeyer-Verfahren

Das Rock-Exposé rankt sich um ein Zahlenbeispiel, in dem insgesamt 169.332 Stimmen abgegeben werden und 74 Ratssitze auf acht Parteien gemäß ihren Stimmenerfolgen zu verteilen sind. Die hier zu untersuchenden Quotenverfahren für die Sitzzuteilung gehen aus von der Quote $169.332 / 74 = 2.288,270$, der durchschnittlichen Stimmzahl pro Sitz³. Im Allgemeinen ergibt die Division keine ganze Zahl, in diesem Beispiel hat sie die Nachkommaperiode 0,270270270...

Das Beispiel gewinnt an Charme, wenn die Gesamtstimmzahl um zwanzig Stimmen verringert wird, um hier mit einer ganzzahligen Quote arbeiten zu können:

$$\text{Quote} = \frac{\text{Gesamtstimmen}}{\text{Gesamtsitze}} = \frac{169.312}{74} = 2.288$$

Die Quote dient als Wahlschlüssel: *Auf je 2.288 Stimmen entfällt ein Sitz.*

Auf diese Weise beläuft sich für Partei A mit 74.781 Stimmen⁴ der ideale Anspruch auf $74.781 / 2.288 = 32,684$ Sitzbruchteile. Im ersten Schritt, der Hauptzuteilung, erhält Partei A den unproblematischen Ganzzahlteil ihres Idealanspruchs, 32 Sitze. Ebenso wird mit den anderen Parteien verfahren. Insgesamt werden in der Hauptzuteilung 69 der 74 Sitze ausgegeben, siehe Beispiel 1.

Beispiel 1: Exposé-Beispiel mit Hare/Niemeyer-Verfahren

Partei	Stimmen	Idealanspruch	Hauptzuteilung	Rundungsgewinn	Restausgleich	Sitze
A	74.781	32,684 (4)	32	0,316 (4)	1	33
B	45.564	19,914 (2)	19	0,086 (2)	1	20
C	18.341	8,016 (8)	8	0,984 (8)	0	8
D	12.671	5,538 (6)	5	0,462 (6)	0	5
E	6.730	2,942 (1)	2	0,058 (1)	1	3
F	5.739	2,508 (7)	2	0,492 (7)	0	2
G	4.244	1,855 (3)	1	0,145 (3)	1	2
H	1.242	0,543 (5)	0	0,457 (5)	1	1
Summe	169.312	74,000	69	—	5	74
Die Hare/Niemeyer-Reihung erfolgt gemäß kleinstem Rundungsgewinn, d.h. gemäß aufgerundeter Idealanspruch – Idealanspruch						

Es verbleiben fünf Restsitze für den zweiten Schritt, den Restausgleich. Das Hare/Niemeyer-Verfahren vergibt die fünf Sitze einzeln in der Abfolge, die entsteht, wenn die Parteien nach fallenden Nachkommaresten ihrer Idealansprüche gereiht werden, siehe Spalte "Idealanspruch": (1) Partei E mit Rest 0,942, (2) B mit 0,914, (3) G mit 0,855, (4) A mit 0,684 und (5) H mit 0,543.

Dieses Vorgehen orientiert sich an dem Verständnis, dass der Nachkommarest des Idealanspruchs den Rundungsverlust bemisst, der die Partei trübe, wenn ihre Sitzzahl auf dem Niveau des abgerundeten Idealanspruchs stehen bliebe. Die Restsitze werden vom Hare/Niemeyer-Verfahren so eingesetzt, dass die größten Rundungsverluste vermieden werden.

In Vorbereitung auf das Rock-Verfahren ist es hilfreich, von (größten) Rundungsverlusten überzuwechseln zu (kleinsten) Rundungsgewinnen im Fall, dass die Partei einen der Restsitze erlangt:

$$\text{Rundungsverlust} = \text{Idealanspruch} - \text{abgerundeter Idealanspruch}$$

$$\text{Rundungsgewinn} = \text{aufgerundeter Idealanspruch} - \text{Idealanspruch} = 1 - \text{Rundungsverlust}$$

In Beispiel 1 zeigt die Spalte "Rundungsgewinn" die Reihung gemäß kleinstem Gewinnwert: (1) Partei E mit Gewinn 0,058, (2) B mit 0,086, (3) G mit 0,145, (4) A mit 0,316 und (5) H mit 0,457. Etwaige Rundungsgewinne werden so klein wie möglich gehalten.

³ Auch Hare-Quote genannt; für andere Quoten siehe Abschn. 8.1.3 in F. Pukelsheim, Sitzzuteilungsmethoden, 2016.

⁴ Zwanzig Stimmen weniger als im Rock-Exposé, um die Gesamtstimmzahl 169.312 zu erreichen.

III. Sitzzuteilung mit Rock-Verfahren

Das Rock-Verfahren behält die Hauptzuteilung bei, komplettiert sie aber mit einem neuartigen Restausgleich.⁵ Zum Beispiel führt für Partei A im zweiten Schritt ein Restsitz zu $32 + 1 = 33$ Sitzen und einem Rundungsgewinn von 0,316 Sitzbruchteilen. Das Rock-Verfahren verteilt diesen Gewinn auf die dann 33 Sitze und erhält daraus den *Gewinn-Index* $0,316 / 33 = 0,010$ für Partei A.

Diese Rundungsgewinne-pro-Sitz sind es, die nach aufsteigenden Werten die Reihung der Parteien festlegen, um die Restsitze zuzuteilen: (1) Partei B mit Gewinn-Index 0,004, (2) A mit 0,010, (3) E mit 0,020, (4) G mit 0,073 und (5) D mit 0,077, siehe Spalte "Gewinn-Index" in Beispiel 2.

Beispiel 2: Exposé-Beispiel mit Rock-Verfahren

Partei	Stimmen	Idealanspruch	Hauptzuteilung	Gewinn-Index	Restausgleich	Sitze
A	74.781	32,684	32	0,010 (2)	1	33
B	45.564	19,914	19	0,004 (1)	1	20
C	18.341	8,016	8	0,109 (6)	0	8
D	12.671	5,538	5	0,077 (5)	1	6
E	6.730	2,942	2	0,020 (3)	1	3
F	5.739	2,508	2	0,164 (7)	0	2
G	4.244	1,855	1	0,073 (4)	1	2
H	1.242	0,543	0	0,457 (8)	0	0
Summe	169.312	74,000	69	—	5	74
Die Rock-Reihung erfolgt gemäß kleinstem Gewinn-Index (= Rundungsgewinn-pro-Sitz), d.h. gemäß (aufgerundeter Idealanspruch – Idealanspruch) / aufgerundeter Idealanspruch						

Im Rock-Exposé wird dieselbe Reihung auf einem etwas anderen Weg hergeleitet. Die Maßzahl, die dort entscheidend ist, wird *prozentualer Rest* genannt und ist definiert als

$$\text{prozentualer Rest} = \frac{\text{Idealanspruch}}{\text{aufgerundeter Idealanspruch}}$$

Der prozentuale Rest ist mit dem hiesigen Gewinn-Index verknüpft durch die einfache Beziehung

$$\text{Gewinn-Index} = \frac{\text{aufgerundeter Idealanspruch} - \text{Idealanspruch}}{\text{aufgerundeter Idealanspruch}} = 1 - \text{prozentualer Rest}$$

Folglich ergibt die Reihung nach aufsteigendem Gewinn-Index wie hier dieselbe Reihenfolge wie die Reihung nach absteigendem prozentualem Rest im Rock-Exposé.⁶

Den Begriff "prozentualer Rest" halte ich für unglücklich. Im gegebenen Umfeld gibt es keine Prozente, die sich über einer Grundgesamtheit zu 100 Prozent aufaddieren; mit "prozentual" ist wohl "relativ" gemeint. Zudem geht der Begriff "Rest" am Gehalt der Definition vorbei.

Die Rock-Zuteilung in Beispiel 2 unterscheidet sich von der Hare/Niemeyer-Zuteilung in Beispiel 1 nur um den Transfer eines Sitzes: Partei D erhält einen Sitz mehr, dafür geht die schwächste Partei H leer aus. Das Exposé betont, dass der Ausschluss von Partei H, deren Idealanspruch kaum mehr als einen halben Sitz ausmacht, genau das ist, was das Rock-Verfahren bewirken soll.

Jedoch ist die Wirkung nicht nur die, dass die Kleinstpartei H ausgegrenzt wird, sondern sie erfasst das ganze Parteiensystem. Dies lässt sich an der Reihung ablesen, wie die fünf Restsitze vergeben werden. Beim Hare/Niemeyer-Verfahren ist die Reihenfolge E, B, G, A, H. Das Rock-Verfahren führt zu einer anderen Reihung: B, A, E, G, D. Noch deutlicher werden die Auswirkungen auf das System, wenn man die Stimmenzahlen der Parteien so abändert, dass Gleichstände entstehen und alle Idealansprüche genau mit Nachkommarest 0,5 enden.

⁵ Es gibt auch andere Ausgleichsverfahren, siehe Abschn. 8.1.4 in F. Pukelsheim, Sitzzuteilungsmethoden, 2016.

⁶ Der hiesige Gewinn-Index ist *nicht* identisch mit dem Aufrundungsgewinn des Rock-Exposés (dort Seite 6).

IV. Gleichstand-Beispiel mit Rock-Verfahren

Ein Prüfstein für Zuteilungsverfahren sind außergewöhnliche Fallgestaltungen, die zwar unrealistisch sind, aber wesentliche Verfahrenseigenschaften offenlegen. Mit Gesamtstimmenzahl 169.312 und Gesamtsitzzahl 74 (und folglich mit Quote 2.288) seien in Beispiel 3 die Stimmzahlen der Parteien leicht abgewandelt, sodass alle Idealansprüche den glatten Nachkommarest 0,5 erhalten.

Beispiel 3: Gleichstand-Beispiel mit Rock-Verfahren

Partei	Stimmen	Idealanspruch	Hauptzuteilung	Gewinn-Index	Restausgleich	Sitze
A	74.360	32,5	32	0,015 (1)	1	33
B	44.616	19,5	19	0,025 (2)	1	20
C	19.448	8,5	8	0,056 (3)	1	9
D	12.584	5,5	5	0,083 (4)	1	6
E	8.008	3,5	3	0,125 (5)	0	3
F	5.720	2,5	2	0,167 (6)	0	2
G	3.432	1,5	1	0,250 (7)	0	1
H	1.144	0,5	0	0,500 (8)	0	0
Summe	169.312	74,0	70	—	4	74
In diesem Beispiel vereinfacht sich der Gewinn-Index (= Rundungsgewinn-pro-Sitz) gemäß 0,5 / aufgerundeter Idealanspruch						

In diesem Beispiel berechnet sich der Gewinn-Index als Quotient von 0,5 und dem aufgerundeten Idealanspruch. Der Gewinn-Index fällt für die stärkste Partei A mit $0,5 / 33 = 0,015$ kleiner aus als für die zweitstärkste Partei B mit $0,5 / 20 = 0,025$ usw. Die Rock-Reihung reproduziert die Reihenfolge gemäß Stimmenstärken. Die vier Restsitze gehen an die vier stärksten Parteien.

Im Gegensatz dazu würde die Hare/Niemeyer-Zuteilung auf die Gleichheit der Nachkommaresten der Idealansprüche reagieren und einen Losentscheid notwendig machen. Aus den acht Parteien würden vier *zufällig* ausgelost, die jeweils einen der Restsitze bekämen. Die übrigen vier müssten sich mit den Sitzzahlen aus der Hauptzuteilung zufriedengeben.

V. Rock-Verfahren und Wahlgrundsätze

Für die Bewertung von Zuteilungsverfahren sind die Grundsätze der gleichen Wahl und der unmittelbaren Wahl zentral. In den Augen der Verfassungsgerichte hat der Grundsatz der gleichen Wahl zuvorderst eine Ausgestaltung für das Wahlvolk. Alle Wähler und Wählerinnen sollen mit der Stimme, die sie abgeben, den gleichen Einfluss auf das Wahlergebnis haben.

In Beispiel 3 verweist der Rest 0,5 eines Idealanspruchs jeweils auf eine Gruppe von 1.144 Personen.⁷ Die Wählergruppen, die nach der Hauptzuteilung noch zu repräsentieren sind, sind von der Personenstärke her für alle Parteien gleich. Jedoch stellt das Rock-Verfahren die Gruppe der 1.144 A-Wähler an die Spitze, reiht die 1.144 B-Wähler auf Platz 2 ein usw. Der Erfolg gleichstarker Wählergruppen ist ungleich; er hängt von der Partei ab, der die Wählerstimmen zugutekommen.

Im realitätsnäheren Beispiel 2 gibt es keine zwei Gruppen von Reststimmen, deren Stärken genau gleich wären. Die Rock-Reihung der Parteien B, A, E, G, D, C, F und H geht einher mit Reststimmengruppen von 2.092, 1.565, 2.154, 1.956, 1.231, 37, 1.163 und 1.242 Personen.⁸ Die Sprunghaftigkeit der Stärken zeigt, dass die Gruppen nicht unmittelbar nach Einzelpersonen gewichtet werden, sondern mittelbar eine gruppenweise Differenzierung erfahren. Die 1.231 D-Wähler sind per Restsitz vertreten, die fast gleichstarke Gruppe der 1.242 H-Wähler dagegen nicht.

⁷ Der Idealanspruchsrest 0,5 steht bei Quote 2.288 für eine Gruppe von $0,5 \cdot 2.288 = 1.144$ Wählerinnen und Wählern.

⁸ Zum Beispiel bleiben für Partei B $45.564 - 19 \cdot 2.244 = 2.092$ Reststimmen.

Differenzierungen im Wahlrecht müssen durch Gründe gerechtfertigt sein, die durch die Verfassung legitimiert und von einem Gewicht sind, das der Wahlgleichheit die Waage halten kann. Solche Gründe kann ich dem Rock-Exposé nicht entnehmen.

Das Gleichheitspostulat lässt durchaus zu, nicht-wesentlich Gleiches ungleich zu behandeln. Diese Sicht könnte zu Gunsten des Rock-Verfahrens sprechen. Rundungsgewinne werden ungleich relativiert – in den Beispielen 1–3 für Partei A relativ zu 33 Sitze, für Partei B relativ zu 20 Sitze usw. – aus dem Grund, dass die Parteien ungleich stark sind.

Die Ungleichbehandlung führt dazu, dass die Chancen, an der Zuteilung der Restsitze zu partizipieren, für stärkere Parteien steigen und für schwächere Parteien sinken. So fielen etwa 2004 bei der Gemeinderatswahl in Hürth zwei Restsitze an.⁹ Das Hare/Niemeyer-Verfahren vergibt die beiden Sitze an FDP und GRÜNE, das Rock-Verfahren an SPD und CDU, siehe Beispiel 4.

Beispiel 4: Wahl des Gemeinderats der Stadt Hürth am 26.09.2004

Partei	Stimmen	Idealanspruch	Rundungsgewinn	Hare/Niem.-Zuteilung	Gewinnindex	Rock-Zuteilung
SPD	10.321	19,426	0,574 (3)	19	0,029 (1)	20
CDU	9.738	18,329	0,671 (4)	18	0,035 (2)	19
GRÜNE	1.872	3,523	0,477 (2)	4	0,119 (4)	3
FDP	1.446	2,722	0,278 (1)	3	0,093 (3)	2
Summe	23.377	44,000	—	44	—	44
Die Hare-Quote beträgt $23.377 / 44 = 531,3$. Der Übergang von der Hare/Niemeyer-Zuteilung zur Rock-Zuteilung bedeutet Sitztransfers von FDP und GRÜNE zu SPD und CDU.						

Die Transferrichtung von schwachen zu starken Parteien in Beispiel 4 ist typisch. Im Extremfall würde eine (starke) Partei A mit Idealanspruch 19,1 und großem Absolutgewinn 0,9 eher einen Restsitz erhalten als eine (schwache) Partei Z mit Idealanspruch 1,9 und kleinem Absolutgewinn 0,1, weil der Gewinn-Index von A kleiner wäre als der von Z: $0,9 / 20 = 0,045 < 0,1 / 2 = 0,05$.

Auch gilt es zu bedenken, dass zur Berechnung des Gewinn-Index der absolute Rundungsgewinn dividiert wird durch die Sitzzahl, die sich aus der Hauptzuteilung plus Restsitz ergibt. Diese Pro-Sitz-Relativierung steht dem Grundsatz der unmittelbaren Wahl entgegen, weil sie auf dem Weg von Stimmen zu Sitzen einen Umweg einschlägt über eine Zwischenrechnung, die eine Umwertung von grundsätzlich gleich zu gewichtenden Wählerstimmen beinhaltet.

VI. Vereinzelter Sitzexzess und durchschnittliche Sitzverzerrung

Das Rock-Verfahren wird im Exposé motiviert damit, dass es vermeintliche Defizite sowohl des Sainte-Laguë-Verfahrens (derzeit gesetzlich vorgeschrieben) als auch des Hare/Niemeyer-Verfahrens (früher gesetzlich vorgeschrieben) vermeidet:

Im Sitzzuteilungsverfahren nach Sainte-Laguë kommt es bei Abwesenheit einer formellen Sperrklausel häufig zu größeren Verzerrungen zu Gunsten von Kleinstparteien, wenn der Idealanspruch von wenig mehr als einem halben Sitz auf einen ganzen Sitz aufgerundet wird.

Dieser Satz zielt auf einzelne Anwendungsfälle. Es kann in der Tat vorkommen, dass der Idealanspruch von kaum mehr als einem halben Sitz auf einen ganzen Sitz aufgerundet wird.

Jedoch stehen solchen Situationen andere Einzelfälle gegenüber, in denen der Idealanspruch von knapp weniger als einem halben Sitz auf Null abgerundet wird. Die Partei oder Wählergruppe erhält keinen Sitz und bleibt im Rat außen vor. Solche Einzelfallbetrachtungen werden durch den Begriff *Sitzexzess einer Partei* erfasst.¹⁰

⁹ Internet: alt.wahlergebnisse.nrw.de/kommunalwahlen/2004/Gem_raete/c362028kw0400.htm

¹⁰ In einer gegebenen Anwendungssituation ist der Sitzexzess die Differenz von realer Sitzzahl der Partei und ihrem Idealanspruch, siehe Abschn. 3.1 in F. Pukelsheim, Sitzzuteilungsmethoden, 2016.

Wird ein Idealanspruch von kaum mehr als einem halben Sitz auf Eins aufgerundet, ist der Exzess positiv: die Partei genießt Rundungsglück. Wird ein Idealanspruch von knapp weniger als einem halben Sitz auf Null abgerundet, ist der Exzess negativ: die Partei erleidet Rundungspech. Nur auf Rundungsglück durch Aufrundung zu starren, wie im Exposé, ist einseitig. Die Kehrseite gibt es auch. Für eine Kleinstpartei bedeutet Rundungspech durch Abrundung das parlamentarische Aus.

Das in jedem *einzelnen* Anwendungsfall Rundungseffekte auftreten, ist bei allen Zuteilungsverfahren so und von der Sache her unvermeidlich. Ein Lamento über vereinzelt auftretendes Rundungsglück und Rundungspech ist unergiebig. Die Frage ist, ob bei wiederholten Anwendungen Rundungsglück und Rundungspech typischerweise einen vorhersagbaren Trend aufweisen.

Dies wird durch den Begriff *Sitzverzerrung* beschrieben. Die Sitzverzerrung einer Partei ist der *erwartete* Sitzexzess, also nicht ein einzelner Exzesswert, sondern das Mittel über alle Sitzexzesswerte, die bei wiederholten Anwendungen des Verfahrens auftreten können. Für diese Sitzverzerrungen stellt die Mathematik Formeln bereit.¹¹ Sie besagen, dass sowohl Sainte-Laguë-Verfahren als auch Hare/Niemeyer-Verfahren unverzerrt sind, d. h. jede Partei, von der stärksten bis zur schwächsten, kann für sich erwarten, dass **im Durchschnitt** ihre Sitzzahlen dem Ideal strikter Proportionalität gleichkommen. Rundungsglück hier und Rundungspech dort bleiben zwar im Einzelfall aktuell, heben sich aber in Wiederholungsfällen gegenseitig auf und führen zu einem Ausgleich.

Kleinstparteien werden sowohl vom Sainte-Laguë-Verfahren als auch vom Hare/Niemeyer-Verfahren unverzerrt behandelt und *nicht* begünstigt, anders als im Exposé behauptet. Anders als im Exposé behauptet, kann das Rock-Verfahren durchaus eine systematische Bevorzugung der stimmenstärkeren Parteien bewirken, wie ich anhand Beispiel 4 erläutere.¹²

VII. Quotenverfahren und Divisorverfahren

Das Rock-Verfahren ist Gegenläufigkeiten ausgesetzt, wie alle anderen Quotenverfahren auch. Es gibt Fälle, in denen bei einem Aufwuchs der verfügbaren Sitze eine Partei einen Sitz verliert. Es gibt Fälle, bei denen eine Partei einen Sitz mehr bekommt, obwohl sie Stimmen verliert und alle anderen Parteien Stimmen dazugewinnen. Es gibt Fälle, in denen ein Sitz von einer Partei zu einer anderen wandert, nur weil eine Kleinstpartei hinzutritt, die sowieso keinen Sitz bekommt.¹³

Dagegen sind bei Divisorverfahren solche Gegenläufigkeiten unmöglich. Speziell beim Sainte-Laguë-Verfahren kommt noch hinzu, dass es auch unverzerrt ist, wie gerade dargestellt wurde.

Wenn – wie im Rock-Exposé – Kleinstparteien der Zugang zum Rat erschwert werden soll, wäre es m. E. besser, das Sainte-Laguë-Verfahren mit einer moderaten Sperrklausel zu ergänzen.¹⁴ Unverzerrtheit und die anderen Vorteile eines Divisorverfahrens blieben erhalten. Gleichbehandlung der zu berücksichtigenden Parteien und der Stimmen, die auf sie entfallen, wäre garantiert. Dieses Argument wurde 2017 dem Verfassungsgerichtshof für das Land Nordrhein-Westfalen vorgetragen, von diesem aber mangels verfassungsrechtlichen Gewichts zurückgewiesen.¹⁵

Ich sehe nicht, wie das Anliegen des Rock-Exposés umgesetzt werden kann, solange die Verfassungsgerichte bei ihrer Engführung bleibt, ausschließlich auf greifbare Funktionsunfähigkeit der Gemeinderäte abzustellen, und für deren Prognose Nachweise verlange, die aus der Praxis der Ratsgeschäfte nicht zu erbringen sind.

11 Siehe Abschn. 3.4 und 8.1.5 in F. Pukelsheim, *Sitzzuteilungsmethoden*, 2016.

12 Anmerkung 3 im Exposé, dass das Rock-Verfahren identisch sei mit dem Verteilen der Restsitze nach D'Hondt, geht fehl. In Beispiel 2 gibt D'Hondt von den fünf Restsitzen Partei A drei Sitze, B zwei und den anderen nichts.

13 Siehe Abschn. 8.1.6 in F. Pukelsheim, *Sitzzuteilungsmethoden*, 2016.

14 Siehe S. 88 in F. Pukelsheim/S. Maier/P. Leutgäb: *Zur Vollmandat-Sperrklausel im Kommunalwahlgesetz*. Nordrhein-Westfälische Verwaltungsblätter 22 (2009) 85–90.

15 Verfassungsgerichtshof für das Land Nordrhein-Westfalen, Urteil zu VerfGH 21/16 vom 21.11.2017, Rn. 127.

VIII. Fragen und Antworten

Der dem Gutachtenauftrag beigefügte Fragenkatalog ist implizit im vorstehenden Text beantwortet. Hier seien noch einmal explizite Antworten formuliert.

1. Kommt es im Sitzzuteilungsverfahren nach Sainte-Laguë bei Abwesenheit einer formellen Sperrklausel häufig zu relevanten Sitzverzerrungen zu Gunsten von Kleinstparteien, insbesondere dann, wenn der Idealanspruch einer Partei wenig mehr als ein halber Sitz beträgt, jedoch auf einen ganzen Sitz aufgerundet wird? Resultiert in diesen Fällen eine bis zu doppelt so hohe Abweichung des Erfolgswerts der Stimmen vom Durchschnittswert aller Parteien?

Das Sainte-Laguë-Verfahren ist unverzerrt und frei von Verzerrungen. Die durchschnittliche Sitzzahl kommt für jede Partei dem Idealanspruch gleich, der sich aus einer nicht-ganzzahligen Verhältnisrechnung (Dreisatz-Rechnung) ergeben würde. Dies umfasst alle Parteien, die in der Verhältnisrechnung berücksichtigt werden, also auch Kleinstparteien; ausgenommen sind nur Parteien, die an einer formellen Sperrklausel scheitern. Im Einzelfall kann es vorkommen, dass ein Idealanspruch von kaum mehr als einem halben Sitz aufgerundet wird und einen der Restsitze legitimiert. Diese Vorkommnisse werden durch andere Einzelfälle ausgeglichen, bei denen ein Idealanspruch von knapp weniger als einem halben Sitz abgerundet wird und kein Restsitz realisiert wird.

2. Wird durch das Rock-Verfahren eine einseitige Bevorzugung größerer Parteien vermieden und wird sichergestellt, dass bei der Restsitzverteilung lediglich eine Auf- oder Abrundung zur nächsten ganzen Zahl erfolgt? Sorgt dieses Verfahren für eine möglichst hohe Erfolgswertgleichheit der Stimmen und bildet den Wählerwillen in einer Wahl ohne Sperrklausel stärker ab?

Typischerweise bevorzugt das Rock-Verfahren stärkere Parteien auf Kosten schwächerer Parteien, weil durch die Pro-Sitz-Relativierung der absolute Sitzgewinn stärkerer Parteien deutlicher herunterskaliert wird als der von schwächeren Parteien; siehe die das Beispiel 4 begleitenden Ausführungen. Das Rock-Verfahren ist ein Quotenverfahren; die Restsitzverteilung ist formal gleichbedeutend damit, dass Idealansprüche entweder zur nächsten ganzen Zahl auf- oder abgerundet werden. Für eine möglichst hohe Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen sorgt das Sainte-Laguë-Verfahren. Da das Rock-Verfahren vom Sainte-Laguë-Verfahren abweicht, ist es hinsichtlich der Erreichung von Erfolgswertgleichheit dem Sainte-Laguë-Verfahren nachgeordnet und bildet den Wählerwillen in einer Wahl weniger gut ab.

3. Wie verhält sich das Rock-Verfahren im Vergleich zum Verfahren nach Sainte-Laguë?

Das Rock-Verfahren ist dem Sainte-Laguë-Verfahren in vielerlei Hinsicht unterlegen, insbesondere hinsichtlich der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen, der Unverzerrtheit der Sitzzuteilung, der Anfälligkeit gegenüber Gegenläufigkeiten (Paradoxien).

4. Wie verhält sich das Rock-Verfahren im Vergleich zum Verfahren nach Hare/Niemeyer?

Rock-Verfahren und Hare/Niemeyer-Verfahren sind Quotenverfahren und haben die Anfälligkeit für damit einhergehende Nachteile (Paradoxien) gemeinsam. Die beiden Verfahren unterscheiden sich in der Zuteilung der Restsitze, mit der die Hauptzuteilung (Ganzzahlteil der Idealansprüche) ergänzt wird. Während das Hare/Niemeyer-Verfahren den durch Aufrundung unumgänglichen (absoluten) Sitzgewinn klein hält, orientiert sich das Rock-Verfahren am (relativen) Gewinn-pro-Sitz. Die Pro-Sitz-Relativierung reibt sich mit dem Grundsatz der unmittelbaren Wahl.

5. Wie verhält sich das Rock-Verfahren im Vergleich zum Verfahren nach D'Hondt?

Zwar bevorzugt das Rock-Verfahren stärkerer Parteien auf Kosten schwächerer Parteien, aber die notorischen Sitzverzerrungen des D'Hondt-Verfahrens fallen noch deutlicher aus. Von daher ist das Rock-Verfahren dem D'Hondt-Verfahren zweifellos überlegen.

6. Welche Verzerrungseffekte und Paradoxien können vorkommen und wie verhalten sich diese im Verhältnis zu den Verfahren nach Sainte-Laguë, Hare/Niemeyer und D'Hondt?

Die Verfahren nach Sainte-Laguë und Hare/Niemeyer sind unverzerrt; bei wiederholten Anwendungen dieser Verfahren bekommt jede Partei, auch eine Kleinstpartei, im Durchschnitt so viele Sitze, wie ihr Idealanspruch ausmacht (Dreisatzrechnung). Das Rock-Verfahren zeigt eine Bevorzugung stärkerer Parteien auf Kosten schwächerer Parteien, die weniger prononciert ausfällt als die notorische Bevorzugung dieser Art bei D'Hondt. Die Verfahren nach Sainte-Laguë und D'Hondt sind als Divisorverfahren frei von Gegenläufigkeiten (Paradoxien). Die Verfahren nach Hare/Niemeyer und Rock sind als Quotenverfahren gelegentlich solchen Paradoxien ausgesetzt.

7. Ist das Rock-Verfahren hinsichtlich der Komponenten, die vom Hare/Niemeyer-Verfahren abweichen, systemgerecht?

Das Rock-Verfahren weicht nur in der Komponente der Restsitzzuteilung vom Hare/Niemeyer-Verfahren ab. Das Verfahren ist im Exposé schlüssig und nachvollziehbar dargestellt. Sein Ziel ist es, keinen Sitz an Kleinstparteien zu vergeben, deren Idealanspruch kaum mehr als einen halben Sitz ausmacht. Dieses Ziel wird in den (wenigen) empirischen Fällen, die bei Kommunalwahl 2004 auftraten und die ich überprüft habe, erreicht.

Anhang

Alternatives Sitzzuteilungsverfahren - Quotenverfahren mit prozentualem Restausgleich

Im Sitzzuteilungsverfahren nach Sainte-Laguë kommt es bei Abwesenheit einer formellen Sperrklausel häufig zu größeren Verzerrungen zu Gunsten von Kleinstparteien, wenn der Idealanspruch von wenig mehr als einem halben Sitz auf einen ganzen Sitz aufgerundet wird. Daraus resultiert in diesen Fällen eine bis zu doppelt so hohe Abweichung des Erfolgswerts der Stimmen vom Durchschnittswert. Im Folgenden wird deshalb ein Sitzzuteilungsverfahren vorgeschlagen, dass diese Fälle minimiert, gleichzeitig aber eine zu einseitige Bevorzugung größerer Parteien vermeidet, wie es beispielsweise bei dem Sitzzuteilungsverfahren nach d'Hondt der Fall ist.

Von Simon Rock

I. Einleitung

Bei Abwesenheit einer formellen Sperrklausel kann je nach gewähltem Sitzzuteilungsverfahren der Effekt auftreten, dass Parteien oder Wählergruppen mit einem tatsächlichen Sitzanspruch (Idealanspruch) von wenig mehr als einem halben Sitz tatsächlich einen ganzen Sitz zugeteilt bekommen. Dies bewirkt im Ergebnis in derartigen Fallkonstellationen eine bis zu doppelt so hohe Abweichung des Erfolgswerts der abgegebenen Wählerstimmen vom Durchschnittswert.

Ein solches Phänomen tritt aufgrund der angewendeten Sitzzuteilungsverfahren nach Sainte-Laguë (Divisorverfahren mit Standardrundung) bzw. Hare/Niemeyer (Quotenverfahren mit Restausgleich nach größten Bruchteilen) auf.¹ Ersteres bewirkt eine Zuteilung auf den ersten Sitz ab einem Idealanspruch von rund 0,5 Sitzen, während bei dem Verfahren nach Hare/Niemeyer sogar eine Sitzzuteilung bei noch geringerem Sitzanspruch möglich ist.

Gleichwohl lässt sich mithilfe des Sitzzuteilungsverfahrens ein verfassungskonformer Weg finden, der dieses Problem weitgehend behebt, ohne eine systematische Bevorzugung größerer Parteien zu bewirken, wie dies bei dem Sitzzuteilungsverfahren nach d'Hondt (Divisorverfahren mit Abrundung) der Fall ist.

Bei dem vorgeschlagenen Verfahren handelt sich grundsätzlich um ein Quotenverfahren, so dass sichergestellt ist, dass jeder Partei einerseits mindestens der abgerundete und andererseits höchstens der aufgerundete Idealanspruch zugeteilt wird.²

¹ Zur Kommunalwahl 2009 löste das Sainte-Laguë-Verfahren das Verfahren nach Hare/Niemeyer bei NRW-Kommunalwahlen ab.

² Dies ist beispielsweise bei dem Verfahren nach d'Hondt nicht sichergestellt.

II. Sitzuteilung nach gängigem Quotenverfahren

Grundsätzlich lässt sich der Idealanspruch I einer Partei p wie folgt berechnen:

$$I_p = \frac{S_p}{G} * m$$

Hierbei steht S_p für die Stimmanzahl der Partei p, G für alle abgegebenen Stimmen und m für die Gremiengröße.

In den allermeisten Fällen ergibt sich **kein** ganzzahliger Sitzanspruch. Da aber Bruchteile von Sitzen nicht sinnvollerweise vergeben werden können, muss eine Regelung zur Verteilung der Restsitze gefunden werden.

Nach dem Verfahren von Hare/Niemeyer werden die Restsitze nach den höchsten Stimmenbruchteilen vergeben. Es wird folglich der absolute Abstand zwischen Idealanspruch I und der tatsächlich vergebenen Sitzanzahl von Partei p minimiert.

Die Verteilung der Restsitze erfolgt also nach folgendem Verfahren:

$$\text{absoluter Rest} = \text{Idealanspruch} - \text{abgerundeter Idealanspruch}$$

$$\tilde{R} = I - [I]$$

Die Restsitzverteilung \tilde{R} ergibt sich also aus der jeweiligen Differenz zwischen Idealanspruch I und auf die nächste ganze Zahl abgerundeten Idealanspruch [I].

Dies soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden:

Für die Wahl eines Gremiums mit m=74 Sitzen treten die acht Parteien a – h an, wobei sich die Stimmverteilung wie folgt darstellt:

Partei	Stimmen	Relativer Stimmanteil
a	74801	44,2 %
b	45564	26,9 %
c	18341	10,8 %
d	12671	7,5 %
e	6730	4,0 %
f	5739	3,4 %
g	4244	2,5 %
h	1242	0,7 %
INSGESAMT	169332	100%

Dementsprechend errechnen sich die Sitzansprüche wie folgt:

$$I_a = \frac{S_a}{G} * m = \frac{74801}{169332} * 74 \cong 32,689$$

$$I_b = \frac{S_b}{G} * m = \frac{45564}{169332} * 74 \cong 19,912$$

$$I_c = \frac{S_c}{G} * m = \frac{18341}{169332} * 74 \cong 8,015$$

$$I_d = \frac{S_d}{G} * m = \frac{12671}{169332} * 74 \cong 5,537$$

$$I_e = \frac{S_e}{G} * m = \frac{6730}{169332} * 74 \cong 2,941$$

$$I_f = \frac{S_f}{G} * m = \frac{5739}{169332} * 74 \cong 2,508$$

$$I_g = \frac{S_g}{G} * m = \frac{4244}{169332} * 74 \cong 1,855$$

$$I_h = \frac{S_h}{G} * m = \frac{1030}{169332} * 74 \cong 0,543$$

Ohne Beachtung der Bruchteile werden somit für die Parteien folgende Sitze verteilt:

Partei	Zugeweilte Sitze (ohne Beachtung der Bruchteile)
a	32
b	19
c	8
d	5
e	2
f	2
g	1
h	0
INSGESAMT	69

Insgesamt werden also zunächst nur 69 von 74 Sitzen verteilt. Die Verteilung der restlichen fünf Sitze erfolgt nach dem Verfahren von Hare-Niemeyer anhand der höchsten (absoluten) Bruchteile, die sich in obigem Beispiel wie folgt bestimmen lassen:

$$\tilde{R}_a = 32,689 - 32 = 0,689$$

$$\tilde{R}_b = 19,921 - 19 = 0,912$$

$$\tilde{R}_c = 8,015 - 8 = 0,015$$

$$\tilde{R}_d = 5,537 - 5 = 0,537$$

$$\tilde{R}_e = 2,941 - 2 = 0,941$$

$$\tilde{R}_f = 2,508 - 2 = 0,508$$

$$\tilde{R}_g = 1,855 - 1 = 0,855$$

$$\tilde{R}_h = 0,543 - 0 = 0,543$$

Die restlichen fünf Sitze gehen an die Parteien mit dem höchsten absoluten Bruchteil. Dies trifft auf die Parteien a, b, e, g und h zu.

Somit erhält Partei h ein Mandat zugeteilt, obwohl ihr Idealanspruch nur rund einen halben Sitz beträgt.

An diesem Beispiel wird anhand von Partei h exemplarisch deutlich, dass das Hare-Niemeyer-Verfahren Kleinstparteien in Hinblick auf den Erfolgswert der Stimmen massiv bevorzugen kann. Auch das Verfahren nach Sainte-Laguë führt regelmäßig dazu, dass eine Partei mit einem Idealanspruch von rund einem halben Sitz ein ganzes Mandat erhält.

III. Sitzzuteilung nach Quotenverfahren mit prozentualem Restausgleich

Abhilfe hierzu kann jedoch folgendes **alternative Verfahren**³ schaffen, welches die faktische Sperrklausel etwas erhöht:

Jede Partei erhält zunächst, wie bei dem Verfahren nach Hare-Niemeyer, ihren abgerundeten Idealanspruch. Allerdings erfolgt die Restsitzvergabe nicht anhand des höchsten Bruchwertes, sondern anhand des höchsten prozentualen Restes im Verhältnis zum jeweils nächsten Mandat.

Anders formuliert wird folgende Methodik angewandt:

³ Dieses Verfahren ist mathematisch identisch mit dem Verteilen der **Restsitze** nach d'Hondt, nicht jedoch mit dem allgemeinen d'Hondt-Verfahren.

$$\text{Prozentualer Rest} = \frac{\text{Idealanspruch}}{\text{Idealanspruch aufgerundet}}$$

$$\bar{R} = \frac{I}{[I] + 1}$$

Die Restsitzverteilung \bar{R} ergibt sich also in diesem Verfahren aus dem Verhältnis zwischen dem Idealanspruch I und des auf die nächste ganze Zahl aufgerundeten Idealanspruchs ($[I] + 1$). Die Parteien mit dem höchsten prozentualen Rest \bar{R} erhalten dementsprechend die noch zu vergebenden Restsitze.

Im obigen Beispiel würde sich folgende Konstellation ergeben:

$$\bar{R}_a = \frac{32,689}{33} \cong 0,991 \cong 99,1\%$$

$$\bar{R}_b = \frac{19,912}{20} \cong 0,996 \cong 99,6\%$$

$$\bar{R}_c = \frac{8,015}{9} \cong 0,891 \cong 89,1\%$$

$$\bar{R}_d = \frac{5,537}{6} \cong 0,923 \cong 92,3\%$$

$$\bar{R}_e = \frac{2,941}{3} \cong 0,980 \cong 98,0\%$$

$$\bar{R}_f = \frac{2,508}{3} \cong 0,836 \cong 83,6\%$$

$$\bar{R}_g = \frac{1,855}{2} \cong 0,928 \cong 92,8\%$$

$$\bar{R}_h = \frac{0,543}{1} \cong 0,543 \cong 54,3\%$$

Diese Berechnung hat zur Folge, dass bezüglich der Verteilung der Restsitze der **relative**⁴ Abstand und nicht mehr der **absolute** Abstand zwischen Idealanspruch und tatsächlichen Sitzen minimiert wird.

⁴Bei der Frage des relativen Abstands muss natürlich der Grenzfall zwischen 0 und 1 Sitz vernachlässigt werden, da Divisionen durch 0 nicht sinnvoll möglich sind.

In diesem Fall würden die fünf Restsitze also an die Parteien a, b, d, e und g verteilt werden. Damit würde die Partei d einen Sitz gewinnen, während die die Partei h im Vergleich zu dem Verfahren nach Hare-Niemeyer ihren Sitz verlieren würde. Zusammengefasst stellt sich die Sitzverteilung in diesem Beispiel wie folgt dar, wobei zu Illustrationszwecken auch die Sitzverteilungen mit aufgenommen werden, die sich nach den Verfahren nach d'Hondt bzw. Sainte-Laguë ergeben würden:

Partei	Idealanspruch	Abgerundeter Idealanspruch	Hare-Niemeyer	Alternatives Verfahren	Sainte-Laguë	d'Hondt
a	32,689	32	33	33	32	34
b	19,912	19	20	20	20	21
c	8,015	8	8	8	8	8
d	5,537	5	5	6	6	5
e	2,941	2	3	3	3	3
f	2,508	2	2	2	2	2
g	1,855	1	2	2	2	1
h	0,543	0	1	0	1	0
SUMME	74	69	74	74	74	74

Alternativ lässt sich dieses Sitzzuteilungsverfahren auch mittels prozentualen Aufrundungsgewinns berechnen. Dieser ergibt sich aus der Division des auf die nächste natürliche Zahl aufrundeten Idealanspruchs durch den Idealanspruch, das Ganze subtrahiert um 1. Formal ausgedrückt ergibt sich also folgendes:

$$\text{Aufrundungsgewinn} = \frac{\text{aufgerundeter Idealanspruch}}{\text{Idealanspruch}} - 1$$

$$A = \frac{[I] + 1}{I} - 1$$

Anschließend erhalten die wahlwerbenden Parteien mit dem geringsten Aufrundungsgewinn die zu verteilenden Restsitze.

In dem obigen Beispiel ergäben sich für die Parteien folgende Werte:

$$A_a = \frac{33}{32,689} - 1 \approx 0,95\%$$

$$A_b = \frac{20}{19,912} - 1 \approx 0,44\%$$

$$A_c = \frac{9}{8,015} - 1 \approx 12,29\%$$

$$A_d = \frac{6}{5,537} - 1 \approx 8,35\%$$

$$A_e = \frac{3}{2,941} - 1 \approx 2,00\%$$

$$A_f = \frac{3}{2,508} - 1 \approx 19,62\%$$

$$A_g = \frac{2}{1,855} - 1 \approx 7,84\%$$

$$A_h = \frac{1}{0,543} - 1 = 84,24\%$$

Folglich werden auch hier die 5 zu verteilenden Restsitze an die Parteien a, b, d, e und g vergeben.

Die Verteilung der Restsitze nach größtem prozentualem Rest \bar{R} kommt hierbei stets zu dem identischen Ergebnis wie die Verteilung nach geringstem prozentualem Aufrundungsgewinn A .

IV. Zusammenfassung

Durch dieses Verfahren wird im Ergebnis die faktische Sperrklausel etwas erhöht und eine zu große Verzerrung zu Gunsten von Kleinstparteien vermieden, wie dies teilweise bei den Verfahren nach Sainte-Laguë und Hare/Niemeyer der Fall ist. Gleichzeitig wird durch die Erfüllung der Quotenbedingung sichergestellt, dass systematische Verzerrungen des Wahlergebnisses zu Gunsten großer Parteien nicht auftreten können, wie dies beispielweise bei dem Sitzzuteilungsverfahren nach d'Hondt der Fall ist, welches in Deutschland jahrzehntelang angewendet wurde und teilweise immer noch angewendet wird⁵.

⁵ Bei Landtagswahlen in Deutschland wird das Verfahren nach d'Hondt immer noch in den Bundesländern Niedersachsen, Sachsen und Saarland angewendet.